Rozšíření MA1.
Domácí úkol 1a. – lineární algebra 1

---

1. a) Definujte pojem báze vektorového prostoru V a vysvětlete, co rozumíme souřadnicemi vektoru vzhledem k dané bázi.
   b) Ukažte dle definice, že vektory
   $$\vec{b}_1 = (1, -1, 0),\ \vec{b}_2 = (1, -1, -1),\ \vec{b}_3 = (0, 1, -2)$$
   tvoří bázi prostoru R^3 .
   c) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (1, -1, 1)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.
   d) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

---

2. Jsou dány vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in R^4$:
   $$\vec{u}_1 = (1,\ -1,\ 2,\ 3),\quad \vec{u}_2 = (0,\ 2,\ 1,\ 0),\quad \vec{u}_3 = (0,\ 0,\ -1,\ 1)\ .$$
   a) Ukažte dle definice, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé.
   b) Tvoří vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ bázi prostoru R^4 ? Své tvrzení odůvodněte.
   Pokud basi netvoří, doplňte tuto skupinu vektorů na basi R^4.
   c) Zjistěte, zda vektory $\vec{v} = (1,\ -3,\ -1,\ 5)$, resp. $\vec{w} = (-1,\ 1,\ -3,\ -2)$ jsou lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, a pokud ano, najděte, jakou kombinací.
   Jinak řečeno – máte rozhodnout, zda vektory $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou prvky lineárního obalu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

---

3. Je dána matice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$
   a) Určete hodnost matice A.
   b) Co můžete říct na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic (*)?
   $$(*)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

4. Je dána matice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$
   a) Najděte všechny vektory $v \in R^4$, které jsou ortogonální ke každému z řádků matice A .
   b) Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R^4 dimenze 2.